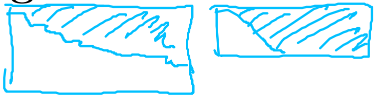
Bonusmaterial 3: Vergleich Matrixzerlegungen



Sei K ein beliebiger Körper.

Satz: *(§3.8)* Für jede Matrix A existieren eine Permutationsmatrix P und eine invertierbare untere Dreiecksmatrix U, so dass $R := UPA$ Zeilenstufenform hat, also $\boxed{A = P^{-1}U^{-1}R}$ ist.

Elementare Zeilenumformungen
Gauss-Algorithmus.

Satz: *(LR-Zerlegung §3.8)* Für jede invertierbare Matrix A existieren eine Permutationsmatrix P, eine invertierbare untere Dreiecksmatrix L, und eine invertierbare obere Dreiecksmatrix R mit $\boxed{A = P^{-1}LR.}$

Satz: *(Bruhat-Zerlegung §3.8 und Wiederholungsserie LAI, Aufgabe 29)* Für jede invertierbare Matrix A existieren eine Permutationsmatrix P und invertierbare obere Dreiecksmatrizen B und B' mit $\boxed{A = BPB'.}$

Homomorphismen

Satz: (§5.8) Für jede Matrix A existieren invertierbare Matrizen U und V, so dass $\boxed{A = UDV}$ ist für eine Blockmatrix der Form

$$D = \left(\begin{array}{c|c} \overset{r\times r\text{-Einheitsmatrix}}{I_r} & O \\ \hline O & O \end{array}\right).$$

Rang$(A) = r$.

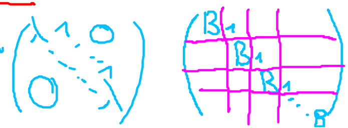
$Ax = 0$

Endomorphismen

Satz: *(Jordansche Normalform §9.5)* Für jede quadratische Matrix A existiert eine invertierbare Matrix U mit $\boxed{A = UJU^{-1}}$, wobei J eine Blockdiagonalmatrix mit Jordanblöcken auf der Blockdiagonalen ist.

Bilinearformen:

Satz: *(§10.15)* Sei $1 + 1 \neq 0$ in K. Für jede symmetrische Matrix A über K existieren eine invertierbare Matrix V und eine Diagonalmatrix D, so dass $\boxed{A = V^TDV}$ ist.



B Begleitmatrix

Jetzt sei $K = \mathbb{R}$.

Gram-Schmidt

Satz: *(QR-Zerlegung §10.10)* Für jede reelle quadratische Matrix A existieren eine orthogonale Matrix Q und eine reelle obere Dreiecksmatrix R, so dass $\boxed{A = QR}$ ist.

Endo / Bilin.

Spektralsatz: *(§10.14)* Für jede reelle symmetrische Matrix A existieren eine orthogonale Matrix Q und eine Diagonalmatrix D, so dass $\boxed{A = QDQ^{-1} = QDQ^T}$ ist.

$\Updownarrow$
$Q^{-1} = Q^T$.

Bilin.

Satz: *(§10.17)* Für jede reelle symmetrische Matrix A sind äquivalent:

(a) Die Matrix A ist positiv definit.

(c) Es existiert eine invertierbare Matrix B mit $\boxed{A = B^T B.}$

(d) *(Cholesky-Zerlegung §10.9)* Es existiert eine invertierbare obere Dreiecksmatrix R mit $\boxed{A = R^T R.}$

(e) Es existiert eine invertierbare symmetrische Matrix C mit $\boxed{A = C^T C = C^2.}$

Homomorphismen

Satz: *(Singulärwertzerlegung §10.18)* Für jede reelle Matrix A existieren orthogonale Matrizen Q und R sowie eine Diagonalmatrix D' mit positiven Diagonaleinträgen, so dass $\boxed{A = QDR}$ ist für

$$D := \left(\begin{array}{c|c} D' & O \\ \hline O & O \end{array}\right).$$

$A^T A$.

$A A^T$.

Jetzt sei $K = \mathbb{C}$.

Satz: *(QR-Zerlegung §11.7)* Für jede komplexe quadratische Matrix A existieren eine unitäre Matrix Q und eine komplexe obere Dreiecksmatrix R, so dass $\boxed{A = QR}$ ist.

reelle

Spektralsatz: *(§11.9)* Für jede hermitesche Matrix A existieren eine unitäre Matrix Q und eine Diagonalmatrix D, so dass $\boxed{A = QDQ^{-1} = QDQ^*}$ ist.

$AA^* = A^*A$ $\Updownarrow$ Def. $Q^{-1} = Q^* = \bar{Q}^T$.

Spektralsatz: *(§11.13)* Eine quadratische komplexe Matrix A ist normal genau dann, wenn eine unitäre Matrix Q und eine Diagonalmatrix D existieren mit $\boxed{A = QDQ^{-1} = QDQ^*}$.

Satz: *(§11.11)* Für jede hermitesche Matrix A sind äquivalent:

(a) Die Matrix A ist positiv definit.

(c) Es existiert eine invertierbare Matrix B mit $\boxed{A = B^*B.}$

(d) *(Cholesky-Zerlegung §11.5)* Es existiert eine invertierbare obere Dreiecksmatrix R mit $\boxed{A = R^*R.}$

(e) Es existiert eine invertierbare hermitesche Matrix C mit $\boxed{A = C^*C = C^2}$.

Satz: *(Singulärwertzerlegung §11.12)* Für jede komplexe Matrix A existieren unitäre Matri(z)en Q und R sowie eine reelle Diagonalmatrix D' mit positiven Diagonaleinträgen, so dass $\boxed{A = QDR}$ ist für

$$D := \left(\begin{array}{c|c} D' & O \\ \hline O & O \end{array}\right).$$